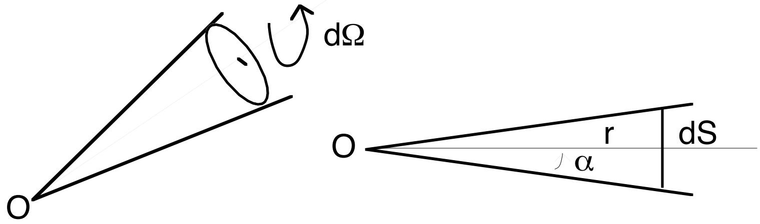
Chapitre II- Lois fondamentales de l'électrostatique

II.1- Flux du champ électrostatique

II.1.1- Notion d'angle solide

La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan. Par exemple, le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux issus d'une lampe torche est entièrement décrit par la donnée de deux grandeurs : la direction (une droite) et l'angle maximal d'ouverture des rayons autour de cette droite. On appelle cette droite la génératrice du cône et l'angle en question, l'angle au sommet.



Définition : l'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS située à une distance r de son sommet O vaut

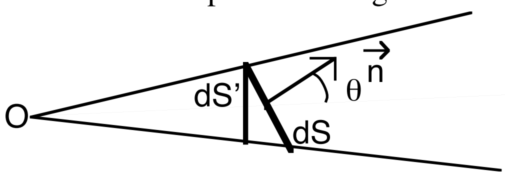
$$\boxed{d\Omega = \frac{dS}{r^2}}$$

Cet angle solide est toujours positif et indépendant de la distance r. Son unité est le « stéradian » (symbole sr).

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut

$$\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Le demi-espace, engendré avec α=π/2 (radians), correspond donc à un angle solide de 2π stéradians, tandis que l'espace entier correspond à un angle solide de 4π (α=π).



D'une façon générale, le cône (ou le faisceau lumineux de l'exemple ci-dessus) peut intercepter une surface quelconque, dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la génératrice de vecteur directeur $\vec{u}$. L'angle solide élémentaire est alors défini par

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS\, \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

où dS' est la surface effective (qui, par exemple, serait « vue » par un observateur situé en O).

II.1.2- Théorème de Gauss

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque <u>orientée</u> est par définition

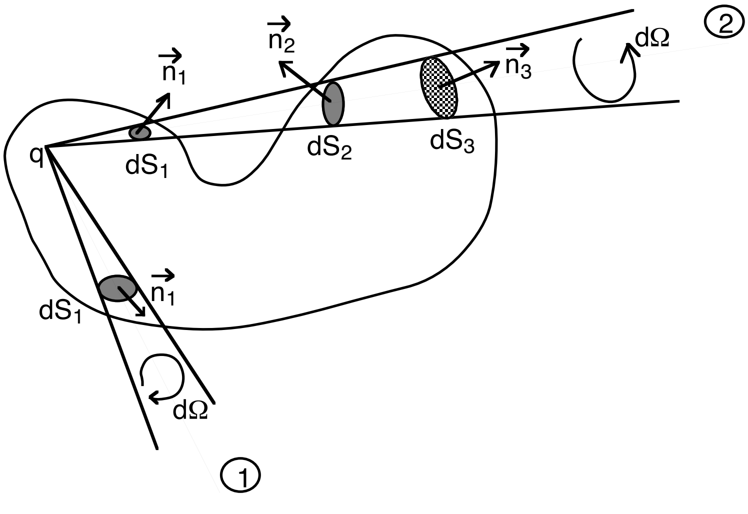
$$d\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal à la surface dS, vers l'extérieur, c'est à dire dans la direction qui s'éloigne de la charge q. Ainsi, pour q>0, le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{n}$ et l'on obtient un flux positif.

A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

c'est à dire un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r (notez bien que dΩ>0, q pouvant être positif ou négatif). Ce résultat est une simple conséquence de la décroissance du champ électrostatique en $1/r^2$: on aurait le même genre de résultat avec le champ gravitationnel.



Que se passe-t-il lorsqu'on s'intéresse au flux total à travers une surface (quelconque) fermée ? Prenons le cas illustré dans la figure ci-dessous. On a une charge q située à l'intérieur de la surface S (enfermant ainsi un volume V), surface orientée (en chaque point de S, le vecteur $\vec{n}$ est dirigé vers l'extérieur). Pour le rayon 1, on a simplement

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

mais le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{n_1}}{r_1^2}dS_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{n_2}}{r_2^2}dS_2 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{n_3}}{r_3^2}dS_3\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(d\Omega \quad - \quad d\Omega \quad + \quad d\Omega\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \end{aligned}$$

Ce résultat est général puisque, la charge se trouvant à l'intérieur de S, un rayon dans une direction donnée va toujours traverser S un nombre impair de fois. En intégrant alors sur toutes les directions (c'est à dire sur les 4π stéradians), on obtient un flux total

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

Théorème de Gauss : *le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à* $1/\varepsilon_0$ *fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

R*emarques* :
1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.
2. La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss : c'est ce qui est fait dans l'électromagnétisme, dans lequel le théorème de Gauss constitue en fait une loi fondamentale, non démontrable (l'une des quatre équations de Maxwell).

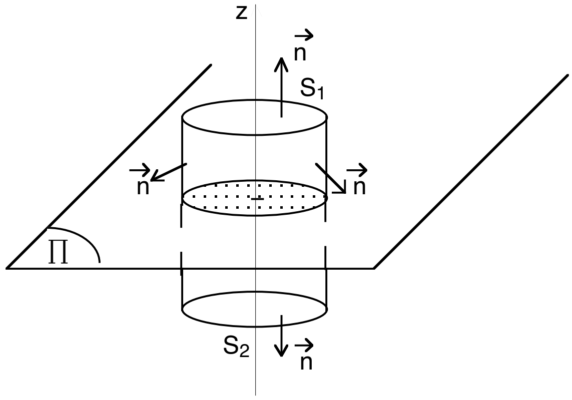
II.1.3- Exemples d'applications

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

On considère un plan infini ∏ portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface. Pour utiliser Gauss, il nous faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$.
Tous les plans perpendiculaires au plan infini ∏ sont des plans de symétrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à ∏. Si ce plan est engendré par

les vecteurs $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ alors $\vec{E} = E_z(x,y,z)\,\vec{k}$. Par ailleurs, l'invariance par translation selon x et y nous fournit $\vec{E} = E_z(z)\,\vec{k}$. Le plan $\prod$ est lui-même plan de symétrie, donc E(z) est impaire.



Etant donné ces propriétés de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situées à des hauteurs symétriques.

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS} \\ &= E(z)S - E(-z)S + 0 = 2ES \\ &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_S \sigma dS = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

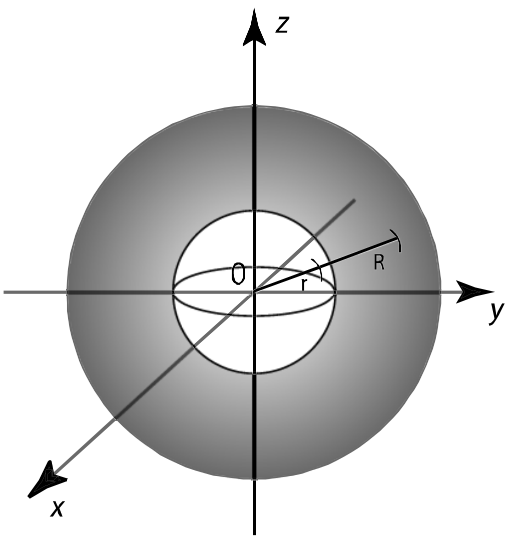
Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Remarques :

1. Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini .
2. On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

Champ créé par une boule uniformément chargée



On considère une boule (sphère pleine) de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ. Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$.

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon r et le théorème de Gauss nous fournit

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_S E(r)dS = E(r)\,4\pi r^2 \\ &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, d\mathcal{V}\end{aligned}$$

Lorsque r<R, on obtient un champ

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

Lorsque r>R, la sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la boule. Mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'en r=R, ce qui fournit donc un champ

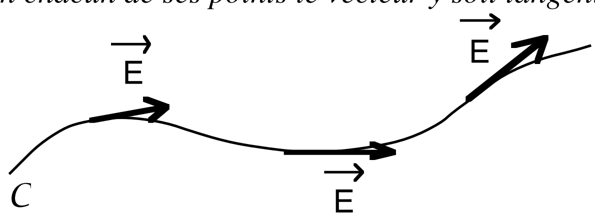
$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}$$

où Q est la charge totale portée par la boule. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit <u>à l'extérieur</u> le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située en O.

II.1.4- Lignes de champ

Le concept de *lignes de champ* (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.

Définition : *Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.*



Considérons un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ $\vec{E}$ soit en tout point de C parallèle à $\vec{dl}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$$

En coordonnées cartésiennes, $\vec{dl} = dx\,\vec{i} \;+\; dy\,\vec{j} \;+\; dz\,\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques $\vec{dl} = d\rho\,\vec{u_\rho} \;+\; \rho d\theta\,\vec{u_\theta} \;+\; dz\,\vec{u_z}$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} \;+\; rd\theta\,\vec{u_\theta} \;+\; r\sin\theta d\varphi\,\vec{u_\varphi}$ et on a

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

Soit un contour <u>fermé</u> C tel que le champ électrostatique y soit tangent, c'est à dire tel que $\vec{E} \perp \vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est un vecteur élémentaire de C. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. L'ensemble de toutes les lignes de champ dessine alors une surface dans l'espace, une sorte de tube. Par construction, le flux du champ électrostatique est nul à travers la surface latérale du tube, de telle sorte que le flux est conservé : ce qui rentre à la base du tube ressort de l'autre coté. On appelle un tel « rassemblement » de lignes de champ un *tube de flux*.

II.2- Circulation du champ électrostatique

II.2.2- Notion de potentiel électrostatique

On va démontrer ci-dessous qu'il existe un scalaire V, appelé potentiel électrostatique, définit dans tout l'espace et qui permet de reconstruire le champ électrostatique $\vec{E}$. Outre une commodité de calcul (il est plus facile d'additionner deux scalaires que deux vecteurs), l'existence d'un tel scalaire traduit des propriétés importantes du champ électrostatique. Mais tout d'abord, est-il possible d'obtenir un champ de vecteurs à partir d'un champ scalaire ?

Prenons un scalaire V(M) défini en tout point M de l'espace (on dit un champ scalaire). Une variation dV de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un point M' infiniment proche est alors fourni par la différentielle totale

$$dV(M) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{grad}\, V \cdot \overrightarrow{dOM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{grad}\, V$, est le gradient du champ scalaire V et constitue un champ de vecteurs défini partout. Ses composantes dans un système de coordonnées donné sont obtenues très simplement. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, on a $\overrightarrow{dOM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ et

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

d'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En faisant de même en coordonnées cylindriques et sphériques on trouve respectivement

$$\overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{grad}\, V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r \sin\theta} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Un déplacement $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'}$ le long d'une courbe (ou surface) définie par V=Constante correspond à dV=0, ce qui signifie que $\overrightarrow{grad}\, V$ est un vecteur qui est perpendiculaire en tout point à cette courbe (ou surface).

Par ailleurs, plus les composantes du gradient sont élevées et plus il y a une variation rapide de V. Or, c'est bien ce qui semble se produire, par exemple, au voisinage d'une charge électrique q: les lignes de champ électrostatique sont des droites qui convergent (q<0) ou divergent (q>0) toutes vers la charge. Il est donc tentant d'associer le champ $\vec{E}$ (vecteur) au gradient d'une fonction scalaire V.

En fait, depuis Newton (1687) et sa loi de gravitation universelle, de nombreux physiciens et mathématiciens s'étaient penché sur les propriétés de cette force radiale en $1/r^2$. En particulier Lagrange avait ainsi introduit en 1777 une fonction scalaire appelée potentiel, plus « fondamentale » puisque la force en dérive. C'est Poisson qui a introduit le potentiel électrostatique en 1813, par analogie avec la loi de Newton.

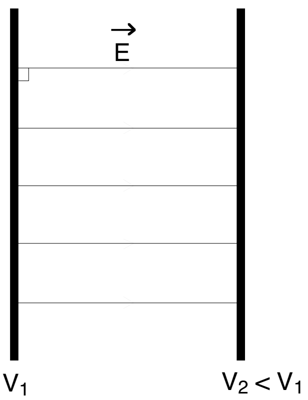
Définition : le potentiel électrostatique V est relié au champ électrostatique $\vec{E}$ par

$$\boxed{\vec{E} = -\,\overrightarrow{grad}\, V}$$

Remarques :
1. Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie électrostatique (cf chapitre IV).
2. La conséquence de cette définition du potentiel est $dV(M) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM}$ pour un déplacement infinitésimal quelconque.
3. *Les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux courbes équipotentielles.*

***Définition** : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est*

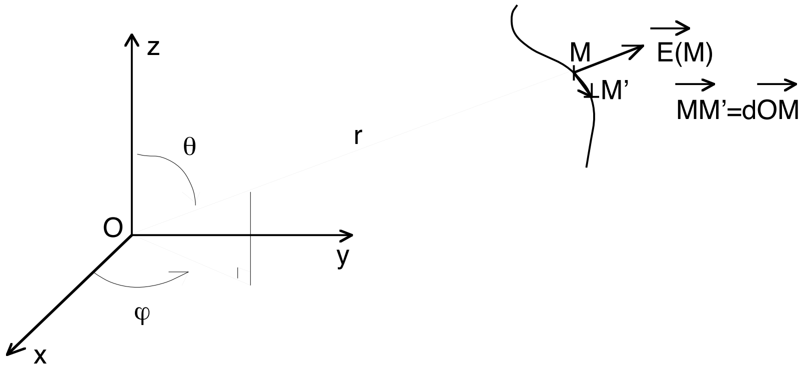
$$\boxed{\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)}$$



Remarques :
1. Cette circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi.
2. La circulation du champ électrostatique sur une courbe fermée (on retourne en A) est nulle. On verra plus loin que ceci est d'une grande importance en électrocinétique.
3. D'après la relation ci-dessus, le long d'une ligne de champ, c'est à dire pour $\vec{E}\cdot\vec{dl} > 0$ on a V(A)>V(B). *Les lignes de champ électrostatiques vont dans le sens des potentiels décroissants.*

II.2.2- Potentiel créé par une charge ponctuelle

Nous venons de voir l'interprétation géométrique du gradient d'une fonction scalaire et le lien avec la notion de circulation. Mais nous n'avons pas encore prouvé que le champ électrostatique pouvait effectivement se déduire d'un potentiel V !



Considérons donc une charge ponctuelle q située en un point O. En un point M de l'espace, cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}$. Le potentiel électrostatique est alors donné par

$$dV(M) = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dOM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{dr}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

c'est à dire, après intégration suivant r,

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad + \quad V_0}$$

Remarques :
1. La constante d'intégration est en général choisie nulle (le potentiel s'annule à l'infini)
2. L'unité du potentiel est le *Volt* . En unités du système international (SI) le Volt vaut
$$\left[V\right] = \left[E\ L\right] = M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-1}$$
3. Si l'on veut se former une représentation du potentiel, on peut remarquer qu'il mesure le degré d'électrification d'un conducteur (voir Chapitre III). Il y a en fait une analogie formelle entre d'un coté, potentiel V et température T d'un corps, et de l'autre, entre charge Q et chaleur déposée dans ce corps.

II.2.3- Potentiel créé par un ensemble de charges

Considérons maintenant un ensemble de n charges ponctuelles q_i distribuées dans tout l'espace. En vertu du principe de superposition, le champ électrostatique total $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}$ est la somme vectorielle des champs $\vec{E_i}$ créés par chaque charge q_i. On peut donc définir un potentiel électrostatique total $V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ soit encore vérifié. En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient

$$\boxed{V(M) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i} \quad + \quad V_0}$$

où r_i est la distance entre la charge q_i et le point M.

Lorsqu'on s'intéresse à des échelles spatiales qui sont très grandes par rapport aux distances entre les charges q_i, on peut faire un passage à la limite continue et remplacer la somme discrète par une intégrale $\sum_i q_i(P_i) \quad \rightarrow \quad \int dq(P)$ où P est un point courant autour duquel se trouve une charge « élémentaire » dq. Le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continue est alors

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad + \quad V_0}$$

où r=PM est la distance entre le point M et un point P quelconque de la distribution de charges.

Remarques :

1. Pour des distributions de charges linéique λ, surfacique σ et volumique ρ, on obtient respectivement

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda\, dl}{r} \quad + \quad V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma\, dS}{r} \quad + \quad V_0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\, dv}{r} \quad + \quad V_0$$

2. Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule en utilisant l'expression discrète (c'est à dire pour $r_i = 0$). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que dq/r converge lorsque r tend vers zéro.

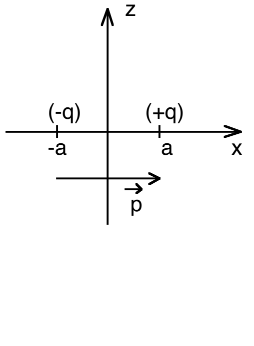
II.3- Le dipôle électrostatique

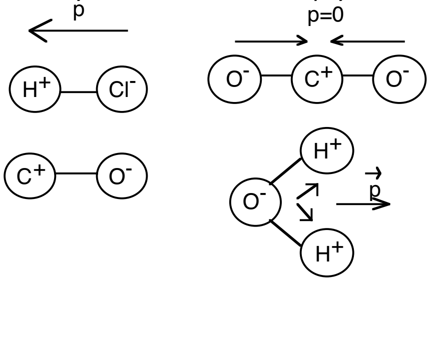
II.3.1- Potentiel électrostatique créé par deux charges électriques

Il existe dans la nature des systèmes globalement électriquement neutres mais dont le centre de gravité des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives. Un tel système peut souvent être décrit (on dit modélisé) en première approximation par deux charges électriques ponctuelles, +q et –q situées à une distance d=2a l'une de l'autre. On appelle un tel système de charges un dipôle électrostatique.

Définition : *on appelle moment dipolaire électrique la grandeur*

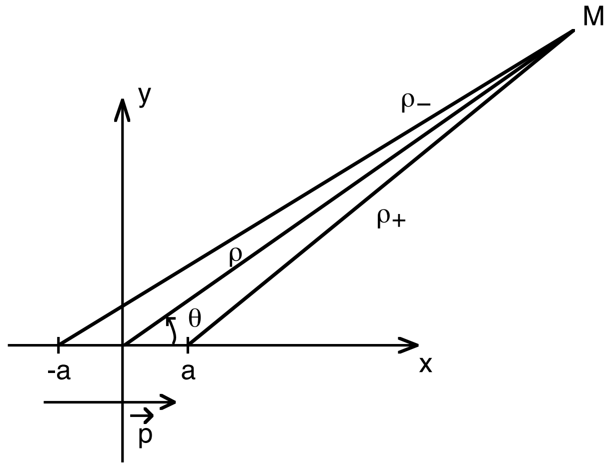
$$\boxed{\vec{p} = qd\,\vec{i} = 2aq\,\vec{i}}$$





Les molécules telles que HCL,CO,H20,CO2 constituent des exemples de dipôles électrostatiques.

Connaître l'effet (la force) électrostatique que ces deux charges créent autour d'elles nécessite de calculer le champ électrostatique. Habituellement, nous aurions appliqué le principe de superposition et calculé ainsi la somme vectorielle des deux champs. L'avantage du potentiel est de permettre d'arriver au même résultat sans se fatiguer.



D'après la section précédente, le potentiel créé en un point M repéré par ses coordonnées polaires (ρ,θ) est simplement

$$V(M) = V_{+q}(M) \quad + \quad V_{-q}(M)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- - \rho_+}{\rho_+\rho_-}$$

où l'on a choisi arbitrairement V=0 à l'infini. Or, $\overrightarrow{\rho_\pm} = \vec{\rho} \mp a\vec{i}$. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est à dire à des distances ρ>>a, on peut faire un développement limité de V. Au premier ordre en a /ρ on obtient

$$\rho_\pm = \left(\overrightarrow{\rho_\pm}\cdot\overrightarrow{\rho_\pm}\right)^{1/2} \approx \rho\left(1 \mp 2\frac{a}{\rho^2}\vec{\rho}\cdot\vec{i}\right)^{1/2} \approx \rho \mp a\cos\theta$$

c'est à dire $\rho_- - \rho_+ \approx 2a\cos\theta$ et $\rho_-\rho_+ \approx \rho^2$. Le potentiel créé à grande distance par un dipôle électrostatique vaut donc

$$\boxed{V(M) = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2} = \frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{u_\rho}}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^2}}$$

II.3.2- Champ créé à grande distance

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ en coordonnées cylindriques. On obtient ainsi

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\,\rho^3} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{pmatrix}$$

Par construction, le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe qui le porte (ici l'axe Ox) : le potentiel ainsi que le champ électrostatiques possèdent donc également cette symétrie. Cela va nous aider à visualiser les lignes de champ ainsi que les équipotentielles. Par exemple, le plan médiateur défini par θ = π/2 (x=0) est une surface équipotentielle V=0.
Les équipotentielles sont des surfaces (dans l'espace ; dans le plan ce sont des courbes) définies par $V = \text{Constante} = V_0$, c'est à dire

$$\rho = \sqrt{\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V_0}}$$

L'équation des lignes de champ est obtenue en résolvant

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta}$$

$$\rho = K\sin^2\theta$$

où K est une constante d'intégration dont la valeur (arbitraire) définie la ligne de champ.

II.3.3- *Complément* : développements multipolaires

Lorsqu'on a affaire à une distribution de charges électriques et qu'on ne s'intéresse qu'au champ créé à une distance grande devant les dimensions de cette distribution, on peut également utiliser une méthode de calcul approché du potentiel. Le degré de validité de ce calcul dépend directement de l'ordre du développement limité utilisé : plus on va à un ordre élevé et meilleure sera notre approximation. Par exemple, l'expression du dipôle ci-dessus n'est valable que pour ρ>>a, mais lorsque ρ tend vers a, il faut prendre en compte les ordres supérieurs, les termes dits multipolaires.

Prenons le cas d'une distribution de charges ponctuelles q_i situées en $\vec{r_i} = \overrightarrow{OP_i}$. Le potentiel créé en un point M repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (coordonnées sphériques) est

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|}$$

En supposant $r >> r_i$, on peut montrer facilement que ce potentiel admet le développement suivant

$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{r} + \frac{q_i r_i \cos\theta_i}{r^2} + \frac{q_i r_i^2}{2r^3}\left(3\cos^2\theta_i - 1\right) + \ldots \right)$$

où θ_i est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{r_i}$. Faire un développement multipolaire d'une distribution quelconque de charges consiste à arrêter le développement limité à un ordre donné, dépendant du degré de précision souhaité. Dans le développement ci-dessus, le premier terme (ordre zéro ou *monopolaire*) correspond à assimiler la distribution à une charge totale placée en O. Cela peut être suffisant vu de très loin, si cette charge totale est non nulle. Dans le cas contraire (ou si l'on souhaite plus de précision) on obtient le deuxième terme qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

où le vecteur $\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r_i}}$ est le *moment dipolaire* associé à la distribution de charges, généralisation à plusieurs charges du moment dipolaire précédent. Lorsqu'on souhaite encore plus de précision (ou si $\vec{p} = \vec{0}$) il faut prendre en compte les termes d'ordre supérieur. Le terme suivant est la contribution *quadrupolaire,* décrivant la façon dont les charges positives et négatives se distribuent autour de leurs barycentres respectifs.