Chapitre III- Actions et énergie magnétiques

III.1- Force magnétique sur une particule chargée

Ce qui a été dit aux chapitres précédents concerne plus particulièrement les aspects macroscopiques, l'influence mesurable d'un champ magnétique sur un circuit électrique. Or, le courant circulant dans un circuit est dû au déplacement de particules chargées. Nous prendrons donc le parti ici de poser l'expression de la force magnétique s'exerçant sur une particule (sans la démontrer) puis de montrer comment s'exprime cette force sur un circuit. Historiquement bien sûr, c'est la force de Laplace qui a été mise en évidence la première, la force de Lorentz n'est venue que bien plus tard…

III.1.1- La force de Lorentz

La force totale, électrique et magnétique (on dit électromagnétique) subie par une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ mesurée dans un référentiel galiléen est

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

On appelle cette force ***la force de Lorentz***. On peut la mettre sous la forme

$$\vec{F} = \vec{F_e} + \vec{F_m} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{F_e} = q\vec{E} \\ \vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

où $\vec{F_e}$ est la composante <u>électrique</u> et $\vec{F_m}$ la composante <u>magnétique</u>. La composante magnétique de la force de Lorentz (parfois appelée force magnétique) possède un ensemble de propriétés remarquables :

1. ***La force magnétique ne fournit pas de travail***. Si on applique la relation fondamentale de la dynamique pour une particule de masse m et charge q, on obtient
$$\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
donc
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\cdot\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) = 0\,.$$
L'énergie cinétique de la particule est donc bien conservée.
2. ***La force magnétique est une correction en*** $(v/c)^2$ ***à la force de Coulomb***, où c est la vitesse de la lumière (cf chapitre I).
3. ***Violation du principe d'action et de réaction.*** On peut aisément vérifier sur un cas particulier simple que la force magnétique ne satisfait pas au 3$^{\text{ème}}$ principe de Newton. Pour cela, il suffit de prendre une particule 1 se dirigeant vers une particule 2. Le champ magnétique créé par 1 sera alors nul à l'emplacement de la particule 2,
$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi r^2}\vec{v_1} \wedge \vec{u_{12}} = \vec{0}\,,$$

et donc la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$ sera nulle. Mais si la deuxième particule ne se dirige pas vers la première, son champ magnétique sera non nul en 1 et il y aura une force $\overrightarrow{F_{2/1}}$ non nulle…

III.1.2- Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique

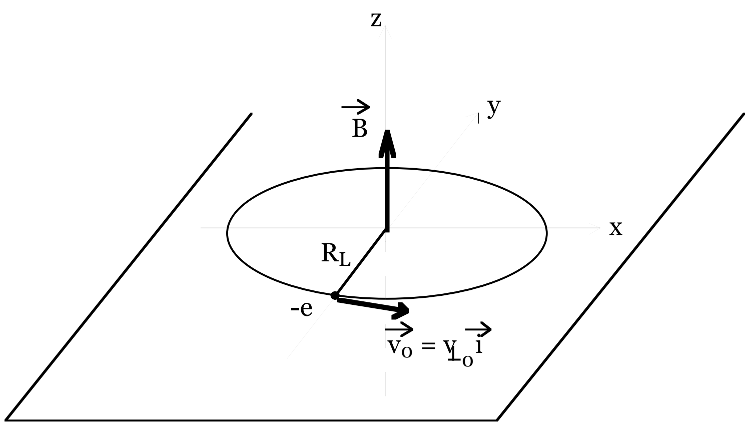
Considérons une particule de masse m et charge q placée dans un champ magnétique uniforme avec une vitesse initiale $\vec{v}(t=0)=\overrightarrow{v_0}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Puisque la force magnétique est nulle dans la direction du champ, cette direction est privilégiée. On va donc tirer parti de cette information et décomposer la vitesse en deux composantes, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au champ, $\vec{v}(t)=\overrightarrow{v_p}+\overrightarrow{v_\perp}$. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\begin{cases}\dfrac{d\overrightarrow{v_p}}{dt}=\vec{0}\\ \dfrac{d\overrightarrow{v_\perp}}{dt}=\dfrac{q}{m}\overrightarrow{v_\perp}\wedge\vec{B}\end{cases}$$

La trajectoire reste donc rectiligne uniforme dans la direction du champ. Prenons un repère cartésien dont l'axe z est donné par le champ $\vec{B}=B\vec{k}$.



Cas particulier d'une particule de charge négative (rotation dans le sens direct)

L'équation portant sur la composante perpendiculaire se décompose alors en deux équations

$$\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=\omega v_y\\ \dfrac{dv_y}{dt}=-\omega v_x\end{cases}\quad \text{où}\quad \omega=\frac{qB}{m}$$

Ce système se ramène à deux équations de la forme $\dfrac{d^2v_i}{dt^2}=-\omega^2 v_i$ (pour i = x,y) et a donc pour solution

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v_x=v_{\perp_0}\cos\omega t\\ \dfrac{dy}{dt}=v_y=-v_{\perp_0}\sin\omega t\end{cases}$$

où l'on a choisi une vitesse initiale suivant x, $\overrightarrow{v_{\perp_0}}=v_{\perp_0}\vec{i}$. En intégrant une deuxième fois ce système on obtient

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_{\perp_0}}{\omega}\sin\omega t \\ y = \dfrac{v_{\perp_0}}{\omega}\cos\omega t \end{cases}$$

où les constantes d'intégration ont été choisies nulles (choix arbitraire). La trajectoire est donc un cercle de rayon $R_L = \left|\dfrac{mv_{\perp_0}}{qB}\right|$, le **rayon de Larmor**, décrit avec la pulsation $\omega = \dfrac{|q|B}{m}$, dite **pulsation gyro-synchrotron**. Ce cercle est parcouru dans le sens conventionnel positif pour des charges négatives.
Le rayon de Larmor correspond à la « distance » la plus grande que peut parcourir une particule dans la direction transverse avant d'être déviée de sa trajectoire. Cela correspond donc à une sorte de distance de piégeage. A moins de recevoir de l'énergie cinétique supplémentaire, une particule chargée est ainsi piégée dans un champ magnétique.

Il est intéressant de noter que plus l'énergie cinétique transverse d'une particule est élevée (grande masse ou grande vitesse transverse) et plus le rayon de Larmor est grand. Inversement, plus le champ magnétique est élevé et plus ce rayon est petit.

Remarque : Nous avons vu au Chapitre II qu'une charge en mouvement créé un champ magnétique. Donc, une particule mise en rotation par l'effet d'un champ magnétique extérieur va créer son propre champ. Il n'en a pas été tenu compte dans le calcul précédent, celui-ci étant la plupart du temps négligeable.

III.1.3- Distinction entre champ électrique et champ électrostatique

Nous allons traiter ici un problème un peu subtil. En mécanique classique, il y a trois principes fondamentaux : le principe d'inertie, la relation fondamentale de la dynamique et le principe d'action et de réaction. Nous avons déjà vu que la force magnétique $\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne satisfaisait pas au 3ème principe. Mais il y a pire. Pour pouvoir appliquer la relation fondamentale de la dynamique, il faut se choisir un référentiel galiléen. Ce choix étant arbitraire, les lois de la physique doivent être indépendantes de ce choix (invariance galiléenne). Autrement dit, les véritables forces doivent être indépendantes du référentiel. Il est clair que ce n'est pas le cas de la force magnétique $\vec{F_m}$. En effet, considérons une particule q se déplaçant dans un champ magnétique avec une vitesse constante dans le référentiel du laboratoire. Dans ce référentiel, elle va subir une force magnétique qui va dévier sa trajectoire. Mais si on se place dans le référentiel propre de la particule (en translation uniforme par rapport au laboratoire, donc galiléen), sa vitesse est nulle. Il n'y a donc pas de force et elle ne devrait pas être déviée ! Comment résoudre ce paradoxe ?
C'est Lorentz qui a donné une solution formelle à ce problème, mais c'est Einstein qui lui a donné un sens grâce à la théorie de la relativité. La véritable force, électromagnétique, est la force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$$

Supposons que cette particule soit soumise à un champ électrostatique $\vec{E_s}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, mesurés dans le référentiel **R** du laboratoire. Dans un référentiel **R'** où la particule est au repos, le terme magnétique sera nul. Si on exige alors l'invariance de la force, on doit écrire

$$\overrightarrow{F'} = q\overrightarrow{E'} = \vec{F} = q\left(\overrightarrow{E_s} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Le champ $\overrightarrow{E'}$ « vu » dans le référentiel **R'** est donc la somme du champ électrostatique $\overrightarrow{E_s}$ et d'un autre champ, appelé ***champ électromoteur*** $\overrightarrow{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$. Ainsi, on a bien conservé l'invariance de la force lors d'un changement de référentiel, mais au prix d'une complexification du champ électrique qui n'est plus simplement un champ électrostatique !

Deux conséquences importantes :

1. La circulation d'un champ électrique $\vec{E} = \overrightarrow{E_s} + \overrightarrow{E_m}$ est en générale non nulle à cause du terme électromoteur (d'où son nom d'ailleurs) : celui-ci peut donc créer une différence de potentiel qui va engendrer un courant, ce qui n'est pas possible avec un champ purement électrostatique.
2. Le champ électrique « vu » dans **R'** dépend du champ magnétique « vu » dans **R**. On ne peut donc pas appliquer la règle de changement de référentiel classique (transformation galiléenne) mais une autre, plus complexe (transformation de Lorentz). Champs électrique et magnétique dépendent tous deux du référentiel, la compréhension de ce phénomène électromagnétique ne pouvant se faire que dans le contexte de la relativité.

Ceci dit, nous utiliserons tout de même l'expression de la force magnétique ou de Lorentz pour calculer, par exemple, des trajectoires de particules dans le formalisme de la mécanique classique. On ne devrait pas obtenir des résultats trop aberrants *tant que leurs vitesses restent très inférieures à celle de la lumière*.

Une dernière remarque : nous avons implicitement supposé que la charge q de la particule était la même dans les deux référentiels. Cela n'est a priori pas une évidence. Nous pouvons en effet imposer que toute propriété fondamentale de la matière soit effectivement invariante par changement de référentiel. Le concept de masse, par exemple, nécessite une attention particulière. En effet, tout corps massif possède un invariant appelé « masse au repos ». Cependant sa « masse dynamique » (impulsion divisée par sa vitesse) sera d'autant plus élevée que ce corps aura une vitesse s'approchant de celle de la lumière.
Nous admettrons donc que la charge électrique est bien un invariant (dit relativiste).

III.2- Actions magnétiques sur un circuit fermé

III.2.1- La force de Laplace

Nous avons vu que la force subie par une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique, la force de Lorentz, s'écrit ; $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Considérons un milieu comportant α espèces différentes de particules chargées, chaque espèce ayant une densité volumique n_α, et une vitesse $\overrightarrow{v_\alpha}$. Ces divers porteurs de charges sont donc responsables d'une densité locale de courant

$$\vec{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}\,.$$

Par ailleurs, chaque particule étant soumise à la force de Lorentz, la force s'exerçant sur un élément de volume d^3V comportant $\sum_\alpha n_\alpha d^3V$ particules s'écrit

$$\overrightarrow{d^3F} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \overrightarrow{v_\alpha} \wedge \vec{B})\, d^3V$$

On voit donc apparaître une force due au champ électrique. Cependant, si le volume élémentaire que l'on considère est suffisamment grand pour que s'y trouve un grand nombre de particules e si le conducteur est électriquement neutre, on doit avoir

$$\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha = 0$$

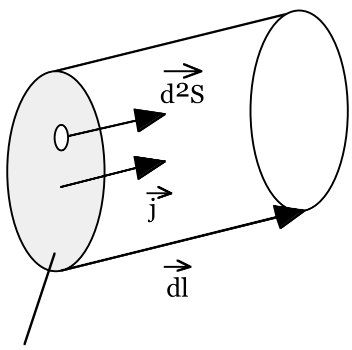
ce qui annule la force électrique.

On obtient alors $\overrightarrow{d^3F} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \overrightarrow{v_\alpha} \wedge \vec{B}\, d^3V = (\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}) \wedge \vec{B}\, d^3V$, c'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{d^3F} = \vec{j} \wedge \vec{B}\, d^3V}$$

Nous avons donc ci-dessus l'expression générale de la force créée par un champ magnétique extérieur sur une densité de courant quelconque circulant dans un conducteur neutre (la résultante est évidemment donnée par l'intégrale sur le volume).

Dans le cas particulier d'un conducteur filiforme, l'élément de volume s'écrit $d^3V = \overrightarrow{d^2S} \cdot \overrightarrow{dl}$, où $\overrightarrow{dl}$ est un élément de longueur infinitésimal orienté dans la direction de $\vec{j}$ et $\overrightarrow{d^2S}$ une surface infinitésimale.



S: section du fil

Dans le cas d'un circuit filiforme (très mince donc où l'on peut considérer que le champ est constant), la force qui s'exerce par unité de longueur s'écrit

$$\overrightarrow{dF} = \iint_S (\vec{j} \wedge \vec{B})\, d^2S dl = (\iint_S \vec{j} d^2S)\, dl \wedge \vec{B}$$

$$= (\iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S})\, \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

$$= I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

La force qui s'exerce sur un conducteur fermé, parcouru par un courant permanent I, appelée **force de Laplace**, vaut

$$\boxed{\vec{F} = I \oint_{circuit} \overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}}$$

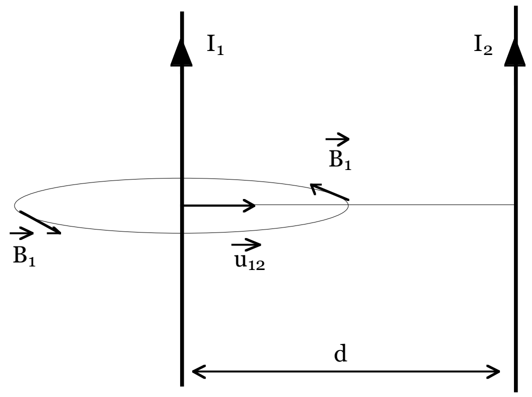
Cette force s'applique sur un circuit qui est un <u>*solide*</u>. Dans ce cours, on ne considèrera que des circuits pour lesquels on pourra appliquer le principe fondamental de la mécanique, en assimilant ceux-ci à des points matériels (leur centre d'inertie). Aucun élément de longueur ne sera privilégié : la force $\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ s'applique au milieu de chaque portion dl.

Remarques :

1. Ayant été établie à partir d'équations valables uniquement en régime permanent, cette expression n'est vraie que pour un courant permanent. Il faut en particulier faire attention à intégrer la force sur le circuit fermé.
2. Pour des circuits fermés de forme complexe, il devient difficile de calculer la force magnétique à partir de l'expression de la force de Laplace. Dans ce cas, il vaut mieux utiliser une méthode énergétique (travaux virtuels, voir plus bas).
3. A partir de la force de Lorentz, qui est une force microscopique agissant sur des particules individuelles et qui ne travaille pas, nous avons obtenu une force macroscopique agissant sur un solide. Cette force est capable de déplacer le solide et donc d'exercer un travail non nul. Comment comprendre ce résultat ? Il faut interpréter la force de Laplace comme la résultante de l'action des particules sur le réseau cristallin du conducteur. C'est donc une sorte de réaction du support à la force de Lorentz agissant sur ses constituants chargés. Au niveau microscopique cela se traduit par la présence d'un champ électrostatique, **le champ de Hall**.
4. Bien que la force de Lorentz ne satisfasse pas le principe d'Action et de Réaction, la force de Laplace entre deux circuits, elle, le satisfait ! La raison profonde réside dans l'hypothèse du courant permanent parcourant les circuits (I le même, partout dans chaque circuit) : en régime permanent, il n'y a plus de problème de délai lié à la vitesse de propagation finie de la lumière.

III.2.2- Définition légale de l'Ampère

Considérons le cas de deux fils infinis parcourus par un courant I_1 et I_2, situés à une distance d l'un de l'autre.



Grâce au théorème d'Ampère, il est alors facile de calculer le champ magnétique créé par chaque fil. La force par unité de longueur subie par le fil 2 à cause du champ $\vec{B}_1$ vaut

$$\overrightarrow{dF}_{1/2} = I_2\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_1 = -I_1\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}_2 = -\overrightarrow{dF}_{2/1}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\overrightarrow{u_{12}}$$

Cette force est attractive si les deux courants sont dans le même sens, répulsive sinon. Puisqu'il y a une force magnétique agissant sur des circuits parcourus par un courant, on peut

mesurer l'intensité de celui-ci. C'est par la mesure de cette force qu'a été établie la définition légale de l'Ampère (A) :
L'Ampère est l'intensité de courant passant dans deux fils parallèles, situés à 1 mètre l'un de l'autre, et produisant une attraction réciproque de 2.10^{-7} Newtons par unité de longueur de fil.

II.2.3- Moment de la force magnétique exercée sur un circuit

Puisqu'un circuit électrique est un solide, il faut utiliser le formalisme de la mécanique du solide (2ème année de DEUG). On va introduire ici les concepts minimaux requis.
Soit un point P quelconque appartenant à un circuit électrique et le point O, le centre d'inertie de ce circuit. Si ce circuit est parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, alors chaque élément de circuit $\vec{dl} = d\vec{OP}$, situé autour de P, subit une force de Laplace $\vec{dF} = I\vec{dl} \wedge \vec{B}$. Le moment par rapport à O de la force de Laplace sur l'ensemble du circuit est alors

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \oint_{circuit} \vec{OP} \wedge \vec{dF}}$$

Soient trois axes Δ_i, passant par le centre d'inertie O du circuit et engendrés par les vecteurs unitaires $\vec{u_i}$. Le moment de la force s'écrit alors $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_i \vec{u_i}$. L'existence d'un moment non nul se traduit par la mise en rotation du circuit autour d'un ou plusieurs axes Δ_i. Autrement dit, par une modification de la « quantité de rotation » du solide, c'est à dire son moment cinétique. Le moment cinétique du solide par rapport à O est

$$\boxed{\vec{J} = \oint_{circuit} \vec{OP} \wedge \vec{v}dm}$$

où dm est la masse élémentaire située sur l'élément dOP, et $\vec{v}$ sa vitesse. Dans tous les cas de figure étudiés dans ce cours, on admettra que le moment cinétique d'un circuit peut se mettre sous la forme

$$\boxed{\vec{J} = \sum_{i=1}^{3} I_i \Omega_i \vec{u_i} = [I]\vec{\Omega}}$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur instantané de rotation et I_i les 3 moments d'inertie du circuit par rapport aux 3 axes Δ_i ([I] est la matrice d'inertie, ici diagonale). Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ_i est défini par

$$\boxed{I_i = \int_{circuit} dm\, r_i^2}$$

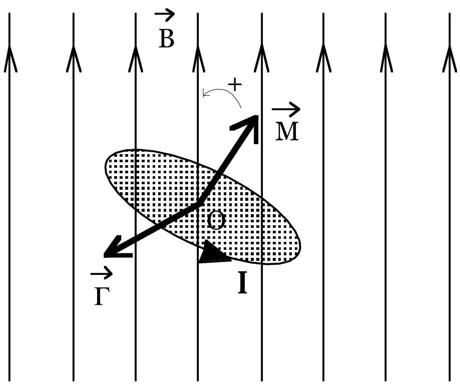
où r_i est la distance d'un point P quelconque du circuit à l'axe Δ_i. La dynamique d'un circuit soumis à plusieurs moments de forces extérieures est donnée par le théorème du moment cinétique (pour un solide)

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum \vec{\Gamma_{ext}}}$$

Dans le cas d'un circuit tournant autour d'un seul axe Oz, avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u_z} = \dot{\theta}\,\vec{u_z}$ et un moment d'inertie I_z constant, on obtient l'équation simplifiée suivante

$$I_z\ddot{\theta} = \sum \Gamma_z$$

II.2.4- Exemple du dipôle magnétique



Considérons le cas simple d'un dipôle magnétique, c'est à dire d'une spire parcourue par un courant I permanent, plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ <u>constant</u> (soit dans tout l'espace, soit ayant une variation spatiale sur une échelle bien plus grande que la taille de la spire).

La force de Laplace s'écrit alors

$$\vec{F} = \oint_{spire} I\vec{dl} \wedge \vec{B} = I(\oint_{spire} \vec{dl}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Un champ magnétique constant ne va donc engendrer aucun mouvement de translation de la spire. Le moment de la force de Laplace par rapport au centre d'inertie 0 de la spire s'écrit

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma} &= \oint_{spire} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF} = \oint_{spire} \overrightarrow{OP} \wedge (I\overrightarrow{dOP} \wedge \vec{B}) \\
&= I \oint_{spire} \overrightarrow{dOP} \cdot (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) \quad - \quad I\vec{B} \cdot \oint_{spire} (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{dOP}) = I \oint_{spire} \overrightarrow{dOP} \cdot (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) \quad - \quad 0 \\
&= I \oint_{spire} \left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}\right) \cdot \left(xB_x + yB_y\right) = IB_y\,\vec{i} \oint_{spire} ydx \quad + \quad IB_x\,\vec{j} \oint_{spire} xdy \\
&= \left(IB_x\,\vec{j} - IB_y\,\vec{i}\right) \oint_{spire} xdy = \left(IB_x\,\vec{j} - IB_y\,\vec{i}\right) S \\
&= IS\vec{n} \wedge \vec{B} \quad (\text{où } \vec{n} = \vec{k} \text{ ,voir calcul du dipôle})
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}}$$

Malgré une résultante des forces nulle, le champ magnétique exerce un moment qui va avoir tendance à faire tourner la spire sur elle-même, de telle sorte que son moment magnétique dipolaire $\vec{M}$ s'aligne dans la direction de $\vec{B}$.

Remarques :

1. Cette expression n'est valable que dans le cas d'un dipôle.
2. On utilise souvent le terme « couple magnétique » pour décrire le moment des forces magnétiques sur un circuit, ceci pour éviter de confondre avec le moment magnétique dipolaire.
3. Les matériaux ferromagnétiques sont ceux pour lesquels on peut assimiler leurs atomes à des dipôles alignés dans le même sens. Mis en présence d'un champ magnétique externe, ils auront tendance à se mettre dans la direction du champ, ce qui va produire un mouvement macroscopique d'ensemble.

II.2.5- Complément : force de Laplace et principe d'Action et de Réaction

On va démontrer que le principe d'Action et de Réaction est bien vérifié pour la force de Laplace s'exerçant entre deux circuits C_1 et C_2 quelconques, parcourus par des courant permanents I_1 et I_2. La force exercée par C_1 sur C_2 s'écrit

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \oint_{C_2} I_2 \overrightarrow{dP_2} \wedge \overrightarrow{B_1} = \oint_{C_2} I_2 \overrightarrow{dP_2} \wedge \left[\oint_{C_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dP_1} \wedge \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2} \right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2}\oint_{C_1} \overrightarrow{dP_2} \wedge \frac{\overrightarrow{dP_1} \wedge \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2}$$

où P_1 (resp. P_2) est un point quelconque de C_1 (resp. C_2) et $\overrightarrow{P_1P_2} = P_1P_2\,\overrightarrow{u_{12}}$. La force exercée par C_2 sur C_1 vaut

$$\overrightarrow{F_{2/1}} = \oint_{C_1} I_1 \overrightarrow{dP_1} \wedge \overrightarrow{B_2} = \oint_{C_1} I_1 \overrightarrow{dP_1} \wedge \left[\oint_{C_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dP_2} \wedge \overrightarrow{u_{21}}}{P_2P_1^2} \right] = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} \overrightarrow{dP_1} \wedge \frac{\overrightarrow{dP_2} \wedge \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2}$$

puisque $\overrightarrow{u_{21}} = -\overrightarrow{u_{12}}$. Par ailleurs, on a

$$\overrightarrow{dP_2} \wedge \left(\overrightarrow{dP_1} \wedge \overrightarrow{u_{12}}\right) = \overrightarrow{dP_1}\left(\overrightarrow{dP_2} \cdot \overrightarrow{u_{12}}\right) - \overrightarrow{u_{12}}\left(\overrightarrow{dP_2} \cdot \overrightarrow{dP_1}\right)$$

$$\overrightarrow{dP_1} \wedge \left(\overrightarrow{dP_2} \wedge \overrightarrow{u_{12}}\right) = \overrightarrow{dP_2}\left(\overrightarrow{dP_1} \cdot \overrightarrow{u_{12}}\right) - \overrightarrow{u_{12}}\left(\overrightarrow{dP_1} \cdot \overrightarrow{dP_2}\right)$$

Il nous suffit donc de calculer le premier terme puisque le second est identique dans les deux expressions des forces. Mathématiquement, les expressions

$$\oint_{C_1}\oint_{C_2}[\ ] = \oint_{C_2}\oint_{C_1}[\ ]$$

sont effectivement équivalentes si ce qui se trouve dans le crochet (la fonction à intégrer) est symétrique par rapport aux variables de chacune des deux intégrales. Mais dans celle de gauche, le point P_1 reste d'abord constant lors de l'intégrale portant sur C_2, tandis que dans celle de droite, c'est le point P_2 qui est maintenu constant lors de l'intégration sur C_1.
Ainsi, on peut écrire

$$\oint_{C_2} \frac{\overrightarrow{dP_1}\left(\overrightarrow{dP_2} \cdot \overrightarrow{u_{12}}\right)}{P_1P_2^2} = \overrightarrow{dP_1} \cdot \oint_{C_2} \frac{\overrightarrow{dP_2} \cdot \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2}$$

$$\oint_{C_1} \frac{\overrightarrow{dP_2}\left(\overrightarrow{dP_1} \cdot \overrightarrow{u_{12}}\right)}{P_1P_2^2} = \overrightarrow{dP_2} \cdot \oint_{C_1} \frac{\overrightarrow{dP_1} \cdot \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2}$$

Posant $\vec{r} = \overrightarrow{P_1P_2}$ et remarquant que $\overrightarrow{dP_2} = d\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{dP_1}$, on obtient

$$\oint_{C_2} \frac{\overrightarrow{dP_2} \cdot \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2} = \oint_{C_2} \frac{\overrightarrow{dr} \cdot \vec{r}}{r^3} = \oint_{C_2} \frac{d\left(r^2\right)}{2r^3} = 0$$

puisque l'on fait un tour complet sur C_2 et l'on revient donc au point de départ. Le résultat est évidemment le même pour l'intégrale portant sur C_1. En résumé, on obtient

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2}\oint_{C_1} \overrightarrow{dP_2} \wedge \frac{\overrightarrow{dP_1} \wedge \overrightarrow{u_{12}}}{P_1P_2^2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2}\oint_{C_1} \overrightarrow{u_{12}} \cdot \left(\overrightarrow{dP_2} \cdot \overrightarrow{dP_1}\right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} \overrightarrow{u_{12}} \cdot \left(\overrightarrow{dP_1} \cdot \overrightarrow{dP_2}\right)$$

$$= -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

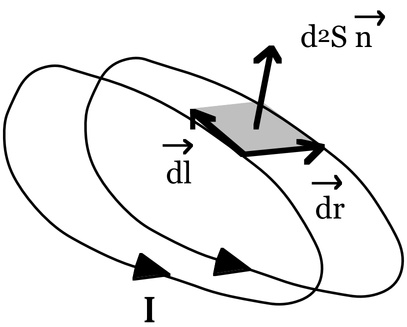
Ceci achève la démonstration.

III.3- Energie potentielle d'interaction magnétique

III.3.1- Le théorème de Maxwell

Un circuit électrique parcouru par un courant produit un champ magnétique engendrant une force de Laplace sur un deuxième circuit, si celui-ci est lui-même parcouru par un courant. Chaque circuit agit sur l'autre, ce qui signifie qu'il y a une énergie d'origine magnétique mise en jeu lors de cette interaction. D'une façon générale, un circuit parcouru par un courant permanent placé dans un champ magnétique ambiant possède une énergie potentielle d'interaction magnétique.

Pour la calculer, il suffit d'évaluer le travail de la force de Laplace lors d'un déplacement virtuel de ce circuit (méthode des travaux virtuels, comme en électrostatique).



Considérons un élément $\vec{dl}$ d'un circuit filiforme, orienté dans la direction du courant I. Cet élément subit une force de Laplace $\vec{dF}$. Pour déplacer le circuit d'une quantité $\vec{dr}$, cette force doit fournir un travail

$$\begin{aligned} d^2W &= \vec{dF}\cdot\vec{dr} \\ &= I(\vec{dl}\wedge\vec{B})\cdot\vec{dr} \\ &= I(\vec{dr}\wedge\vec{dl})\cdot\vec{B} \\ &= Id^2S\vec{n}\cdot\vec{B} \end{aligned}$$

où $d^2S\vec{n}$ est la surface élémentaire décrite lors du déplacement de l'élément de circuit (les trois vecteurs $\vec{dr},\vec{dl},\vec{n}$ forment un trièdre direct). On reconnaît alors l'expression du flux magnétique à travers cette surface balayée, appelé flux coupé. Pour l'ensemble du circuit, le travail dû à un déplacement élémentaire $\vec{dr}$ est

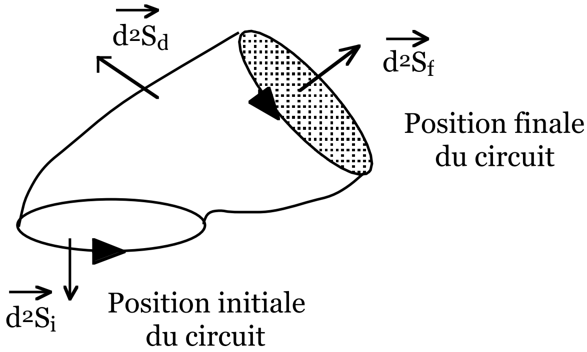
$$dW = \oint_{circuit} d^2W = \oint_{circuit} Id^2\Phi_c = Id\Phi_c$$

Théorème de Maxwell :
Le déplacement d'un circuit électrique fermé dans un champ magnétique extérieur engendre un travail des forces magnétiques égal au produit du courant traversant le circuit par le flux coupé par celui-ci lors de son déplacement.

$$\boxed{W = I\Phi_c}$$

Commentaires sur la notion de Flux coupé
Le nom de flux coupé provient de notre représentation du champ magnétique sous forme de lignes de champ. Lors du déplacement du circuit, celui-ci va en effet passer à travers ces lignes, donc les « couper ».
La notion de flux coupé est très importante car elle permet parfois considérablement de simplifier les calculs. Par ailleurs, <u>dans le cas d'un champ magnétique constant dans le temps</u>,

nous allons démontrer que le flux coupé par le circuit Φ_c lors de son déplacement est exactement égal à la variation du flux total $\Delta\Phi$.



Soit un circuit C orienté, parcouru par un courant I et déplacé dans un champ magnétique extérieur. Ce circuit définit à tout instant une surface S s'appuyant sur C. Lors du déplacement de sa position initiale vers sa position finale, une surface fermée $\sum = S_i + S_f + S_d$ est ainsi décrite, où S_d est la surface balayée lors du déplacement. On choisit d'orienter les normales à chaque surface vers l'extérieur. La conservation du flux magnétique impose alors

$$\Phi_\sum = \Phi_{S_i} + \Phi_{S_f} + \Phi_{S_d} = 0$$

c'est à dire

$$\Phi_{S_d} = -\Phi_{S_i} - \Phi_{S_f}$$

Si on réoriente les normales par référence au courant, on a $\Phi_{S_f} \rightarrow \Phi_{S_f}, \Phi_{S_i} \rightarrow -\Phi_{S_i}$ et $\Phi_{S_d} \rightarrow \pm\Phi_{S_d}$. Autant il est possible de définir correctement et en toute généralité le signe des flux totaux, celui du flux à travers la surface balayée, autrement dit, le flux coupé, dépend de chaque situation. Cependant, on a donc bien

$$\boxed{\Phi_c = \Delta\Phi}$$

qui est vérifié algébriquement. Ne pas oublier que ce raisonnement n'est valable que pour un champ magnétique extérieur <u>statique</u> (pas de variation temporelle du champ au cours du déplacement du circuit).

III.3.2- Energie potentielle d'interaction magnétique

Considérons un circuit électrique parcouru par un courant permanent I et placé dans un champ magnétique statique. Le circuit est donc soumis à la force de Laplace : cela signifie qu'il est susceptible de se déplacer et donc de développer une vitesse. On pourra calculer cette vitesse en appliquant, par exemple, le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W = I\Delta\Phi$. Mais d'où provient cette énergie ?
Si l'on en croit le principe de conservation de l'énergie, cela signifie que le circuit possède un réservoir d'énergie potentielle W_m, lié à la présence du champ magnétique extérieur. L' énergie mécanique du circuit étant $E = E_c + W_m$, on obtient $dW_m = -dW$.
L'énergie potentielle magnétique d'un circuit parcouru par un courant permanent I et placé dans une champ magnétique extérieur est donc

$$\boxed{W_m = -I\Phi \quad + \quad \text{Constante}}$$

La valeur de la constante, comme pour toute énergie potentielle d'interaction, est souvent choisie arbitrairement nulle à l'infini.

III.3.3- Expressions générales de la force et du couple magnétiques

L'existence d'une énergie potentielle se traduit par une action possible (reconversion de cette énergie). Ainsi, la résultante $\vec{F} = \oint_{circuit} \overrightarrow{dF}$ des forces magnétiques exercées sur le circuit est donnée par

$$dW_m = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial W_m}{\partial x_i} dx_i = -dW = -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -\sum_{i=1}^{3} F_i dx_i$$

où les dx_i mesurent les déplacements (translations) dans les trois directions de l'espace par rapport au centre d'inertie du circuit (là où s'applique la force magnétique). On obtient ainsi l'expression générale de la force de Laplace agissant sur un circuit parcouru par un courant permanent, c'est à dire

$$F_i = -\frac{\partial W_m}{\partial x_i}$$

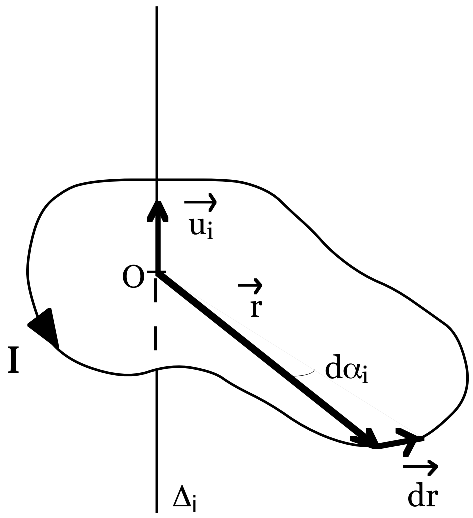
ou, sous forme vectorielle

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, W_m = I\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi}$$

Remarques :

1. La force totale (s'exerçant donc sur le centre d'inertie du circuit) a tendance à pousser le circuit vers les régions où le flux sera maximal.
2. Cette expression est valable uniquement pour des courants permanents. Noter qu'elle s'applique néanmoins pour des circuits déformés et donc pour lesquels il y aura aussi une modification du flux sans réel déplacement du circuit.

On peut faire le même raisonnement dans le cas d'un mouvement de rotation pure du circuit. Prenons le cas général de rotations d'angles infinitésimaux $d\alpha_i$ autour de trois axes Δ_i, passant par le centre d'inertie O du circuit et engendrés par les vecteurs unitaires $\vec{u}_i$.



Soit le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\vec{u}$ reliant un point P quelconque d'un circuit et le point O. La vitesse du point P s'écrit en toute généralité (voir cours de mécanique)

$$\frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u} \quad + \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

où le premier terme correspond à une translation pure et le second à une rotation pure, décrite par le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d\alpha_i}{dt}\,\vec{u}_i$.

L'expression générale du moment de la force magnétique par rapport à O est $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^{3} \Gamma_i \vec{u}_i$.

Le travail dû à la force de Laplace lors d'une rotation pure ($r = OP$ reste constant) s'écrit

$$\begin{aligned} dW &= \oint_{circuit} \overrightarrow{dF} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{circuit} \overrightarrow{dF} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \left(\oint_{circuit} \vec{r} \wedge \overrightarrow{dF} \right) = \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \vec{\Gamma} \\ &= I d\Phi \\ &= \sum_{i=1}^{3} I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}}$$

Autrement dit, le moment de la force magnétique par rapport à un axe Δ_i passant par le centre d'inertie O du circuit, dépend de la variation de flux lors d'une rotation du circuit autour de cet axe.

Exemple : Le dipôle

En supposant que le champ magnétique extérieur est constant à l'échelle d'un dipôle de moment magnétique dipolaire $\vec{\mathrm{M}} = IS\vec{n}$, on obtient un flux $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n}$.
La force magnétique totale s'écrit alors

$$\vec{F} = I\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi = \vec{\nabla}\left(IS\vec{n} \cdot \vec{B} \right)$$

c'est à dire

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\vec{\mathrm{M}} \cdot \vec{B} \right)}$$

Le moment de la force magnétique (couple magnétique) s'écrit

$$\Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = I \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\vec{B} \cdot \vec{n} S \right) = \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial IS\vec{n}}{\partial \alpha_i} \right) = \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i}$$

Or, le moment magnétique dipolaire varie de la façon suivante lors d'une rotation

$$d\vec{M} = \sum_{i=1}^{3} d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{M} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$$

et on obtient donc

$$\Gamma_i = \vec{B} \cdot \left(\vec{u}_i \wedge \vec{M} \right) = \left(\vec{M} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{u}_i$$

c'est à dire l'expression vectorielle

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathrm{M}} \wedge \vec{B}}$$

Remarquer que ce calcul est bien plus facile que le calcul direct effectué à la section II.2.4.

III.3.4- La règle du flux maximum

Un solide est dans une position d'équilibre stable si les forces et les moments auxquels il est soumis tendent à le ramener vers cette position s'il en est écarté. D'après le théorème de Maxwell on a

$$dW = Id\Phi = I(\Phi_f - \Phi_i) = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Si la position est stable, cela signifie que l'opérateur doit fournir un travail, autrement dit un déplacement $\vec{dr}$ dans le sens contraire de la force (qui sera une force de rappel), donc $dW < 0$ ou $\Phi_f < \Phi_i$.

Un circuit tend toujours à se placer dans des conditions d'équilibre stable, où le flux du champ est maximum.

Cette règle est très utile pour se forger une intuition des actions magnétiques.